Title	群を歪める：量子群の話(基研短期研究会「数理物理学における非線形問題」,研究会報告)
Author(s)	神保, 道夫
Citation	物性研究 (1992), 57(5): 628-634
Issue Date	1992-02-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/94865
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

群を歪める―量子群の話―

京大理　神保道夫

0. われわれの身近な事物から、数学や物理の高度な理論にいたるまで、「対称性」は様々な場面に顔を出す。いわく、折返し対称。文字の入れ替え。平行移動。回転。等々…。対称性の感覚は、人間の認識能力のごく基本的な部分に根差している様に思える。

たとえば、ある図形が対称性を持つということは、ある操作・変換で動かしたものが元の図形とピッタリ重なること、である。つまり、煎じ詰めれば、このような操作全体のつくる変換群による不変性を述べているのに他ならないことに気付く。変換群が連続パラメータを持つ場合（リー群）については、無限小変換の全体（リー環）に関する不変性として述べることもできる。

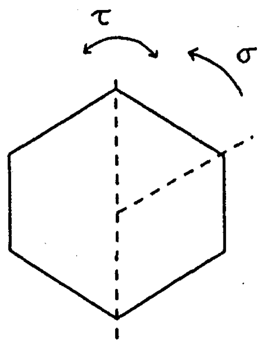

図1．正 n 角形の対称性。軸に関する左右の折返し τ と、反時計回りの $\frac{2\pi}{n}$ の回転 σ とで、2面体群 D_n が生成される。

ところが、群ないしリー環による不変性がないのに、なおかつある意味で対称性の特徴が生残っているような状況があることが、最近になってわかってきた。このいわば「歪んだ対称性」の担い手のことを量子群とよんでいる。[1),2)] 群の量子化とは一体何か、想像をたくましくしたくなる名前であるが、その実体はある種の代数―詳しくいえばある付加構造をそなえた、ホップ代数とよばれる代数のことに他ならない。量子群の概念が認識されたのは、高々5－6年前、ソ連の V. G. Drinfeld を始めとする人々の仕事による。ちなみに、 Drinfeld は１９９０年の京都における国際数学者会議においてフィールズ賞を授与されているが、その受賞対象となった仕事の一つの柱が量子群の創出であった。

目下盛んに研究されつつあるこの量子群の考え方を、これから簡単に紹介したいと思う。主題の性質上若干の数式を使わざるを得なかった点は御辛抱戴きたい。

1．量子力学において、物理系が対称性を持つために状態の縮退が生じることはしばしば経験する。いま量子系のハミルトニアン H がある無限小変換のもとで対称、すなわち無限小変換の生成演算子 J^α と可換であるとしよう：$[J^\alpha, H] \equiv J^\alpha H - HJ^\alpha = 0$。このとき、$H$ のひとつの固有状態から出発してそれに J^α を施していったものも、再び同じ固有値に属する固有状態となる。そのために固有値の縮退が生じるわけである。

このようなハミルトニアンの簡単な例として、1次元格子上のスピン・チェインがあげられる。

$$a)\ H_1 = \sum_{n=1}^{N-1} (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z)$$

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ J^\pm = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \sigma_n^\pm, \quad J^z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \sigma_n^z. \quad (\sigma_n^\pm = \sigma_n^x \pm \sigma_n^y)$$

図2．等方的スピン・チェイン

ここで $\sigma^\alpha{}_n$ は格子点 n 上の状態空間に働くパウリ行列 σ^α をあらわしている。この系の相互作用はスピンの向きについて等方的な形をしているので、ハミルトニアン H_1 はスピンの回転の無限小演算子 $J^\pm, J^z$ と可換になっている。後者は、リー環 $\mathfrak{sl}_2$ の交換関係

$$[J^z, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad [J^+, J^-] = 2J^z \tag{1}$$

を満たしている。そこで、$\mathfrak{sl}_2$ の表現論を適用すれば、H_1 の固有値の重複度について完全な情報が得られることになる。

ここで、交換関係（1）が、チェインの長さ N には無関係に一定の形をしていることに注意しておこう。これは、角運動量の合成則としてなじみ深い、次の事実に基づいている：いま J_1^α, J_2^α が独立の空間1、2に働く（1）をみたす演算子ならば、合成した状態 $|\mathrm{tot}\rangle = |1\rangle \otimes |2\rangle$ 上の演算子 $J^\alpha|\mathrm{tot}\rangle = J_1^\alpha|1\rangle \otimes |2\rangle + |1\rangle \otimes J_2^\alpha|2\rangle$ もまた（1）をみたす。この合成則を $\Delta J^\alpha = J^\alpha \otimes 1 + 1 \otimes J^\alpha$ と書こう。

さて、図2の系において等方性が破れたらどうであろうか。図3 a は、z 方向にパラメータ q で表される非等方性をもったハミルトニアンの例を示す。[5] 等方的な場合 $q = 1$ を除けば、H_q はもはやリー環の対称性をもっていない。にもかかわらず、実は H_q の固有値も H_1 と全く同じ縮退の様子を示すのである。

$$a)\ H_q=\sum_{n=1}^{N-1}\left(\sigma_n^x\sigma_{n+1}^x+\sigma_n^y\sigma_{n+1}^y+\frac{q+q^{-1}}{2}\sigma_n^z\sigma_{n+1}^z\right)+\frac{q-q^{-1}}{2}(\sigma_1^z-\sigma_N^z)$$

$$b)\ J^{\pm}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}k_1\cdots k_{n-1}\sigma_n^{\pm}k_{n+1}^{-1}\cdots k_N^{-1},\quad k_n=q^{\sigma_n^z/2}$$

$$J^z=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^z.$$

図3．非等方的スピン・チェイン

この一見奇妙な事実を説明するには、対称性の考え方を拡張せねばならない。いま非等方性に応じて、新たに図3 bで定められる演算子 $J^{\pm}, J^z$ を考えてみよう。すると、これらは H_q と可換になっていて、しかも（チェインの長さによらず）次の交換関係をみたしていることがわかる。

$$[J^z,J^{\pm}]=\pm J^{\pm},\quad [J^+,J^-]=\frac{q^{2J^z}-q^{-2J^z}}{q-q^{-1}} \tag{2}$$

この右辺は J^z について非線形であるから、リー環の範囲にはおさまらず、ある代数を定義することになる。生成元 $J^{\pm}, J^z$ と関係式（2）をもって定まる代数のことを量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とよんでいる。極限 $q\to 1$ では、この代数はリー環の交換関係（1）のもとに生成元の多項式がつくる代数—リー環 $\mathfrak{g}$ の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ とよぶ—にもどる。その意味で、$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ のことを包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の q–変形などともいったりする。

リー環の場合と同様に、$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ もひねった形の「角運動量合成則」をもっている：

$$\begin{aligned}\Delta J^{\pm}&=J^{\pm}\otimes k^{-1}+k\otimes J^{\pm}\quad (k=q^{J^z})\\ \Delta J^z&=J^z\otimes 1+1\otimes J^z.\end{aligned} \tag{3}$$

この合成を繰返したものが図3 bの形である。ただし、リー環 の場合と違って注意が必要なのは、空間1、2の合成の順序によって結果が変ってくる点である。合成則（3）は、丁度代数における「積」の双対概念になっているので、余積とよばれる。大まかにいって、余積の与えられた代数をホップ代数という。

大事なことは、こうして変形をうけた代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ も、その表現論に関する限り、$\mathfrak{sl}_2$ の性質をほとんどそのまま保存していることである。すなわち、パラメータ q が1の巾乗根でない限り、つぎのことがなりたつ。

(1) $\mathfrak{sl}_2$ の任意の（有限次元）表現は、$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現に変形することができる。

(2) その際表現行列の詳細は q によるが、既約表現の次元・ウエイトの重複度・テンソル積の分解法則などの大まかな特性は $\mathfrak{sl}_2$ の場合と変らない。

ハミルトニアン H_q の縮退の様子が H_1 のそれと一致することは、これらの事実の直接の帰結にほかならない。

以上をまとめると、図4で定まる量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は、ホップ代数として包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の変形になっている。このような、包絡環のホップ代数としての q-変形は、単純リー環を含む広いクラスのリー環 について知られている。[3),4)]

生成元： $J^{\pm}$, J^z

関係式： $[J^z, J^{\pm}] = \pm J^{\pm}, \quad [J^+, J^-] = \dfrac{k^2 - k^{-2}}{q - q^{-1}} \quad (k = q^{J^z})$

余積　： $\Delta J^{\pm} = J \pm \otimes k^{-1} + k \otimes J^{\pm}$

$\Delta J^z = J^z \otimes 1 + 1 \otimes J^z$

図4．量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

2. リー環 はいうまでもなくリー群の無限小部分である。ではリー群そのものの変形を考えることはできないだろうか？この問は、実は「空間の非可換化」の問題にかかわってくる。

リー群の簡単な例として、行列式が1である 2×2 行列のつくる群 $G = SL(2)$ をとりあげてみよう。群の元 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は平面の座標 (x, y) に線形変換

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy \tag{4}$$

としてはたらいている。

さて、座標 x, y はもちろん可換な量であるが、仮にこれらが非可換であって交換関係

$$yx = qxy \tag{5}$$

に従うものとしたらどうであろうか。そもそもこの手続はどういう意味付けができるだろうか。

反省してみると、元来 x, y とは、平面 X の点に対し、それぞれの座標の値（＝数）を与える、X 上の関数であった。他方、X 上の関数全体 $Fun(X)$ は、関数 f, g の和と積をその値ごとに $(f+g)(p) = f(p) + g(p)$, $(fg)(p) = f(p)g(p)$（p は X の点）と決めてやれば、自然に可換な代数になっている。（可換である理由は値が数だからである。）そこで、いま生成元 x, y と関係式（５）で定められる非可換代数を考えて $Fun_q(X)$ と書き、これを $Fun(X)$ の非可換な変形とみなすことにしよう。座標が非可換であるような平面などというものは本来考えることができないので、その上の関数にあたるものに着目して、仮想的「量子平面」の代用とするわけである。

上と同様に考えると、a, b, c, d は群の元 g にたいしその $(1,1)$ 成分の値 $a(g)$ などを対応させる G 上の関数である。そこで群 G 上の関数全体 $Fun(G)$ の非可換代数への変形を導入することに思い至る。図5の関係式がそれにあたり、自然にホップ代数の構造も定義される。これを量子群 $Fun_q(SL(2))$ とよんでいる。

生成元： a, b, c, d

関係式： $ba = qab, \quad ca = qac$

$bd = q^{-1}db, \quad cd = q^{-1}dc$

$bc = cb, \quad ad - q^{-1}bc = da - qbc = 1$

余積： $\begin{pmatrix} \Delta a & \Delta b \\ \Delta c & \Delta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

図5．量子群 $Fun_q(SL(2))$．余積の式は $\Delta a = a \otimes a + b \otimes c$ 等を表す。

線形変換（４）に戻ろう。この右辺は群の元 g と平面の点 p に対して値 $a(g)x(p) + b(g)y(p)$ などを与える、つまり $G \times X$ 上の関数とみなすことができる。こうみると（４）は「歪んだ平面＝量子平面」に「歪んだ群＝量子群」がはたらいている式と解釈できる。つまり、いま x, y を $Fun_q(X)$ の生成元、a, b, c, d を $Fun_q(G)$ の生成元として、x, y と a, b, c, d は互いに可換とすれば（４）で定めた x', y' も再び交換関係 $y'x' = qx'y'$ に従うのである。

ここで前節の $U_q(\mathfrak{g})$ との関係にふれておこう。リー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ は、群 $G = SL(2)$ の無限小部分だから、後者の関数環 $Fun(G)$ には微分作用素としてはたらいている。この関係は自然に q-変形にも移行できる。$U_q(\mathfrak{g})$ と $Fun_q(G)$ とは本質的には同一の対象を表裏から眺めた関係—数学的に言えば双対ホップ代数— になっている。

3. 一体ホップ代数の q-変形というような数学的対象に、なぜ「量子群」という名がつくのか、不審に思われる読者もおられるかもしれない。大らかに言って非可換化 ≑ 量子化、と思って下さってもよい。実はもう少し深い意味があって、$Fun_q(G)$ は、リー群 G 上のポアソン構造（古典力学系）の量子化という解釈ができることが知られている。[7] また $U_q(\mathfrak{g})$ の方も、元来は量子的可積分系の下部構造として発見されたものであった。どちらの場合にも、q は e^h（h はプランク定数）にあたっている。これらはあまり専門的な話になるので、これ以上立入らないことにする。なお、リー群でなく離散的な群にホップ代数の意味での量子化があるのかどうか、筆者は知らない。

量子群は、これまですでに数学・物理のさまざまな局面に顔を出している。主なものを思いつくままに順不同であげてみよう。

(1)　統計物理や場の量子論における可解な模型の構成（ヤン・バクスター方程式の解の構成）

(2)　結び目の不変式、3次元多様体の不変量の構成

(3) 特殊関数の q アナログと、その表現論的取扱い

(4)　共形場理論におけるコンフォーマル・ブロックのモノドロミー

(5)　場の理論の模型の内部対称性

(6)　有限体上の代数群、quiver の表現論

(7)　非可換幾何学の試み

特に表現論について一言述べておこう。$U_q(\mathfrak{g})$ の表現論は、q が1の巾乗根になると全く様相が異なり、デリケートな現象が起こる。これは古典論（$q=1$）にはない新しい局面で、それ自体として面白く、また（1）、（2）、（4）などの応用上でも重要である。他方、$q^{\pm 1} \to 0$ の極限を考えると、一般には複雑な様子をもつ表現論に著しい簡易化がおこる。このことを利用して、従来の方法では困難であった詳しい情報を得ることが可能になり、極めて興味深い。[8)]

量子群の定義自身は、生成元と関係式で与えられた（ホップ）代数、といういささか無味乾燥な代物であった。もっとも、群やリー環 にしても、抽象的公理を見ただけでは何やら掴みどころのない概念である。考えている対象が基本的なものであるほど、抽象的性格をもってくるのは致し方ないことといえるのではなかろうか。量子群は「対称性」について基本的な概念ではないかと筆者は思っている。

参考文献

1) V.G.Drinfeld: Quantum groups, Proceedings of ICM Berkeley, 798–820, 1986.

2) 神保道夫: 量子群とヤン・バクスター方程式（シュプリンガー現代数学シリーズ）、シュプリンガー東京（１９９０）１３４頁

3) V.G.Drinfeld: Hopf algeras and the quantum Yang-Baxter equation, Soviet Math. Doklady vol.**32**, no.1, 254–258, 1985.

4) M.Jimbo: A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. vol.**10**,no.1, 63–69, 1985.

5) V.Pasquier and H.Saleur: Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups, Nucl.Phys.**B330**, no. 523–556, 1990.

6) S.L.Woronowicz: Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus, Publ. RIMS, Kyoto Univ. vol.**23**, no.1, 117–181, 1987.

7) 文献 1) のほか、たとえば L.A.Takhtajan: Quantum groups, in 'Introduction to quantum groups and integrable massive models of quantum field theory', Nankai Lectures on Mathematical Physics, World Scientific, 1990, 69–197.

8) M.Kashiwara: Crystalizing the q-analogue of unversal enveloping algebras, Comm. Math. Phys. to appear.

付記： この論文は、パリティ６巻８号（丸善、１９９１年）に掲載された論文の原稿をそのまま転載したものである。